LE MATEMATICHE
Vol. LIII (1998) – Fasc. I, pp. 133–154

M_λ-IPERGRUPPOIDI MATROIDALI APPLICAZIONI λ-LINEARI E AUTOMORFISMI DI M_λ-IPERGRUPPOIDI

DOMENICO FRENI

In this paper we forward in the investigation of the matroidal M_λ-hypergrupoids introduced in [13]. We give necessary and sufficient conditions for a M_λ-hypergrupoid to be matroidal; moreover, we find its cardinality and we analyse the properties of the corresponding omomorphisms. The paper gives also a characterization of the group $\Lambda(G_\lambda)$, that is the one of the automorphisms of the hypergroupoid G_λ; this hypergroupoid is obtained by a given group G, an element of its λ and the action of G on G determined by the same operation of G. If G has finite cardinality we have:

$$|\Lambda(G_\lambda)| = [G : \langle\lambda\rangle]!|\lambda|^{[G:\langle\lambda\rangle]}.$$

In questo articolo si continua e si approfondisce lo studio degli M_λ-ipergruppoidi. Assegnato un gruppo G che opera a sinistra su un insieme M mediante l'azione $\varphi : (x, a) \mapsto xa$ e fissato un elemento λ di G, sull'insieme M si definisce l'iperprodotto:

$$a \bullet b = b \bullet a = \{\lambda a, \lambda b\}, \quad \forall (a, b) \in M^2. \tag{1.1}$$

Entrato in Redazione il 26 marzo 1998.

L'insieme M munito dell'iperprodotto $\bullet$ è un H_V-gruppo, cioè soddisfa le due proprietà:

$$\forall (a, b, c) \in M^3, \quad (a \bullet b) \bullet c \cap a \bullet (b \bullet c) \neq \emptyset; \tag{1.2}$$

$$\forall a \in M, \quad a \bullet M = M \bullet a = M. \tag{1.3}$$

$(M, \bullet)$ si chiama M_λ-ipergruppoide e con abuso di notazione si utilizza il simbolo M_λ per indicare non solo il sostegno M, ma anche lo stesso quasi-ipergruppoide.

Nei primi due paragrafi si trovano delle condizioni necessarie e sufficienti affinchè un M_λ-ipergruppoide sia matroidale e se ne determina la dimensione, mentre, nel terzo paragrafo, si studiano le principali proprietà degli omomorfismi. Significativi sono alcuni risultati sul gruppo $\Lambda(G_\lambda)$ degli automorfismi dell'ipergruppoide G_λ, che si ottiene considerando un gruppo G, un suo elemento λ e l'azione di G su G determinata dalla stessa operazione di G.

Vengono descritti vari esempi che mettendo in risalto gli aspetti geometrici e combinatori della teoria.

In tutto l'articolo, G rappresenterà un gruppo moltiplicativo e si utilizzerà la notazione $|\lambda|$ per indicare il periodo di un qualunque elemento λ di G.

1. M_λ-ipergruppoidi matroidali.

Nell'articolo [13] sono stati studiati i sottogruppoidi $[A]$ generati da una parte non vuota A di un M_λ-ipergruppoide e sono state determinate delle condizioni affinchè un M_λ-ipergruppoide sia matroidale, cioè verifichi l'assioma dello scambio:

$$x \in [A \cup y], x \notin [A] \quad \Rightarrow \quad y \in [A \cup x]. \tag{1.4}$$

Si osservi che il simbolo $[\emptyset]$ si utilizza per rappresentare l'intersezione di tutti i sottoipergruppoidi di un ipergruppoide $(H, \circ)$ ed ovviamente sono possibili i due casi: $[\emptyset] = \emptyset$ oppure $[\emptyset] \neq \emptyset$.

Nel secondo caso, l'insieme $[\emptyset]$ è un sottoipergruppoide di H e più precisamente: $[\emptyset]$ *è il più piccolo sottoipergruppoide di* H *se e solo se* $[\emptyset] \neq \emptyset$.

In particolare, per la Proposizione 3.2 di [13], in ogni M_λ-ipergruppoide di cardinalità maggiore di 1 e tale che λ appartiene al nucleo N_φ dell'azione di G su M oppure G non opera transitivamente su M, l'intersezione di tutti i sottoipergruppoidi di M_λ è vuota.

Significativo è il seguente:

Teorema 1.1. *Se* $[\emptyset] \neq \emptyset$*, allora* $M_\lambda = [\emptyset]$ *se e solo se* M_λ *è matroidale.*

L'implicazione $\Rightarrow$ è ovvia; alla dimostrazione dell'implicazione inversa si premette il seguente:

Lemma 1.2. *Se* M_λ *è un ipergruppoide matroidale tale che* $[\emptyset] \neq \emptyset$*, allora si ha:*

1) *Se esiste almeno un elemento* $b \in M_\lambda$ *tale che* $[b] \neq M_\lambda$*, allora* $[b] = [\emptyset]$*;*
2) *Esiste* $a \in M_\lambda$ *tale che* $M_\lambda = [a]$.

Dimostrazione. 1) Se esiste un elemento $b \in M_\lambda$ tale che $M_\lambda \neq [b]$, preso $a \in M_\lambda - [b]$, per il Corollario 2.4 (1) di [13], esiste una coppia $(n, m) \in N^* \times N$ tale che $\lambda^n a = \lambda^m b$, perchè $\emptyset \neq [\emptyset] \subset [a] \cap [b]$. Pertanto, $b = \lambda^{n-m} a$ con $n - m > 0$ e di conseguenza $b \in [a]$ (si osservi che $b = \lambda^{n-m} a$ e $n - m \leq 0$ implicano $a = \lambda^{m-n} b \in [b]$, impossibile). Del resto, se $b \notin [\emptyset]$, essendo M_λ matroidale, si ha $a \in [b]$, contraddizione. Dunque $b \in [\emptyset]$ e $[b] = [\emptyset]$.

2) Se per ogni $a \in M$ si ha $M_\lambda = [a]$, la dimostrazione è conclusa. Se esiste un elemento $b \in M_\lambda$ tale che $[b] \neq M_\lambda$, allora $M_\lambda = [a]$, per ogni $a \in M_\lambda - [b]$. Infatti, se $M_\lambda \neq [a]$, per 1), si ha $[a] = [\emptyset] = [b]$ e quindi $a \in [b]$, contraddizione.

Adesso si dimostra l'implicazione $\Leftarrow$ del Teorema 1.1.

Per il Lemma 1.2 - 2), esiste un elemento $a \in M_\lambda$ tale che $M_\lambda = [a]$, e per il Corollario 2.4 (1) di [13], si ha $M_\lambda = \{\lambda^n a\}_{n \geq 0}$.

Ora, se λ appartiene al nucleo N_φ dell'azione φ di G su M, la cardinalità di M_λ è uguale ad uno e si ricava subito $M_\lambda = [\emptyset]$. Mentre, se $\lambda \notin N_\varphi$ ed $a \notin [\lambda a]$, allora $a \notin [\lambda^2 a]$ in quanto $[\lambda^2 a] = \{\lambda^n a\}_{n \geq 2} \subset [\lambda a]$, quindi i due sottoipergruppoidi $[\lambda a]$ e $[\lambda^2 a]$ sono entrambi strettamente contenuti in M_λ . Applicando il Lemma 1.2 - 1), si ottiene $[\lambda a] = [\emptyset] = [\lambda^2 a]$, quindi $\lambda a \in [\lambda^2 a]$ ed esiste un intero positivo $k \geq 2$ tale che $\lambda a = \lambda^k a$, da cui $a = \lambda^{k-1} a \in [\lambda a]$, contraddizione. Pertanto $a \in [\lambda a]$ ed esiste un intero $k \geq 1$ tale che $\lambda^k a = a$.

Infine, posto $r = \min\{k \in N^* | \lambda^k \in Stab_G(a)\}$, si ricava

$$M_\lambda = \{a, \lambda a, \ldots, \lambda^{r-1} a\} \tag{1.5}$$

e per ogni intero k tale che $0 \leq k \leq r - 1$, si ha:

$$M_\lambda = [\lambda^k a], \tag{1.6}$$

perchè $a = \lambda^r a \in [\lambda^k a]$. Inoltre, essendo $[\emptyset] \neq \emptyset$, esiste un intero $k \in \{0, 1, \ldots, r-1\}$ tale che $\lambda^k a \in [\emptyset]$, per cui $[\emptyset] = [\lambda^k a] = M_\lambda$ e la dimostrazione è conclusa.

Corollario 1.3. *Sono equivalenti le seguenti condizioni:*

1) M_λ *è matroidale;*

2) *La famiglia* $\mathcal{F}(M_\lambda) = \{[a]\}_{a\in M}$ *dei sottoipergruppoidi ciclici di* M_λ *è una partizione di* M.

Dimostrazione. Si incominci ad osservare che $M = \bigcup_{a\in M}[a]$ ed inoltre $[a] \neq \emptyset$, per ogni $a \in M_\lambda$.

Si distinguano i due casi: $[\emptyset] \neq \emptyset$ e $[\emptyset] = \emptyset$.

Nel primo caso, se M_λ è matroidale, per il Teorema 1.1, si ha $M_\lambda = [\emptyset]$ e quindi $M_\lambda = [a]$, per ogni $a \in M_\lambda$. Dunque $\mathcal{F}(M_\lambda) = \{M\}$ ed ovviamente è una partizione di M. Viceversa, se $\mathcal{F}(M_\lambda)$ è una partizione di M, la cardinalità di $\mathcal{F}(M_\lambda)$ è uguale ad uno, altrimenti esiste una coppia (a, b) di elementi distinti di M tale che $[a] \cap [b] = \emptyset$, quindi $[\emptyset] = \emptyset$, contraddizione. Pertanto $M_\lambda = [a]$, per ogni $a \in M$, ed ogni sottoipergruppoide K di M_λ coincide con M_λ, cioè $M_\lambda = [\emptyset]$ ed ovviamente è matroidale.

Nel secondo caso, se M_λ è matroidale e (a, b) è una coppia di elementi di M_λ tale che $[a] \cap [b] \neq \emptyset$, preso $c \in [a] \cap [b]$, si ha $\{a, b\} \subset [c]$, quindi $[a] = [c] = [b]$. Viceversa, sia $\mathcal{F}(M_\lambda)$ una partizione di M e si considerino un sottoinsieme A di M_λ e una coppia (a, b) di elementi di M_λ tali che $a \in [A \cup \{b\}]$ ed $a \notin [A]$. Se $A = \emptyset$, si ottiene $a \in [b]$, da cui segue $[a] = [b]$ e $b \in [a] = [A \cup \{a\}]$. Se $A \neq \emptyset$, per il Teorema 2.3 (5) di [13], si ha $a \in [A] \cup [b]$ con $a \notin [A]$, quindi $a \in [b]$ ed anche in questo caso $b \in [a] \subset [A \cup \{a\}]$.

Proposizione 1.4. *Se* M_λ *è matroidale e* $[\emptyset] \neq \emptyset$, *allora* $G = \langle\lambda\rangle\,\mathrm{Stab}_G(a)$, *per ogni* $a \in M$. *Inoltre, se* λ *è un elemento di* G *di periodo finito* n, *la cardinalità* $|M|$ *di* M *divide* n *e*

$$\mathrm{Stab}_G(a) \cap \langle\lambda\rangle = \left\{(\lambda^{|M|})^s : 0 \le s < \frac{n}{|M|}\right\}.$$

Dimostrazione. Per ogni $a \in M_\lambda$ e per ogni elemento $x \in G - (\mathrm{Stab}_G(a) \cup \langle\lambda\rangle)$ si ha $a \neq xa$. Per il Teorema 1.1, $M_\lambda = [a] = [xa]$ ed esistono due interi m ed n tali che $\lambda^n a = \lambda^m(xa)$, dunque $a = (\lambda^{m-n}x)a$ e $\lambda^{m-n}x \in \mathrm{Stab}_G(a)$. Quindi $x \in \lambda^{n-m}\,\mathrm{Stab}_G(a)$ e per conseguenza $G = \langle\lambda\rangle\,\mathrm{Stab}_G(a)$.

Inoltre, posto $r = \min\{k \in N^* | \lambda^k \in \mathrm{Stab}_G(a)\}$, per (1.5), si ha $|M| = r$ ed $n = |\lambda| \ge r = |M|$, perchè $\lambda^n = 1_G \in \mathrm{Stab}_G(a)$.

Del resto, per ogni intero $p \ge 0$, l'elemento λ^{pr} appartiene a $\mathrm{Stab}_G(a)$ e viceversa, se $\lambda^m \in \mathrm{Stab}_G(a)$, dividendo m per r, si ottiene $m = qr + t$ con $0 \le t < r$, quindi

$$a = \lambda^m a = \lambda^t(\lambda^r)^q a = \lambda^t a$$

e per la minimalità di r si ha $t = 0$ ed $m = qr$. Infine, r divide n perchè $\lambda^n = 1_G \in \mathrm{Stab}_G(a)$, quindi $\mathrm{Stab}_G(a) \cap \langle\lambda\rangle = \{(\lambda^r)^s : 0 \le s < \frac{n}{r}\}$.

Esempio 1. Sia H un sottogruppo di indice due di un gruppo G e sia $M = \{a, b\} \cup C$ un insieme tale che $\{a, b\} \cap C = \emptyset = G \cap M$. Ovviamente si ha $H(G - H) = (G - H)H = G - H$ e $(G - H)(G - H) = H$, dunque è ben definita l'azione φ di G su M tale che:

$$\begin{cases} xa = a \quad \text{e} \quad xb = b, \ \forall x \in H; \\ xa = b \quad \text{e} \quad xb = a, \ \forall x \in G - H; \\ xc = c, \ \forall c \in C, \ \forall x \in G. \end{cases}$$

È chiaro che $\mathrm{Stab}_G(a) = \mathrm{Stab}_G(b) = H$ e $\mathrm{Stab}_G(c) = G$, per ogni $c \in C$. Dunque il nucleo dell'azione φ di G su M è $N_\varphi = H$.

Per ogni $\lambda \in H$ e per ogni $m \in M$, si ha $[m] = \{m\}$.

Per ogni $\lambda \in G - H$ e per ogni $c \in C$, si ha $[a] = [b] = \{a, b\}$ e $[c] = \{c\}$.

In entrambi i casi $\mathcal{F}(M_\lambda)$ è una partizione di M e per il Corollario 1.3 M_λ è matroidale. Inoltre, se $C \neq \emptyset$, si ha $[\emptyset] = \emptyset$ perchè $[a] \cap [c] = \emptyset$, per ogni $c \in C$. Mentre, se $C = \emptyset$ e $\lambda \in G - H$, si ha $M_\lambda = [\emptyset]$.

Esempio 2. I due gruppi Z_{12} e Z operano sull'insieme $M = \{a, b\}$ mediante l'azione φ definita nell'esempio 1, ponendo rispettivamente $H = \langle\overline{2}\rangle$ e $H = 2Z$.

Rispetto a Z_{12}, se $\lambda = \overline{3}$ si ha $M_\lambda = [\emptyset]$, $\mathrm{Stab}_G(a) \cap \langle\overline{3}\rangle = \langle\overline{6}\rangle$ ed ovviamente $Z_{12} = \langle\overline{2}\rangle + \langle\overline{3}\rangle$.

Mentre rispetto a Z, preso $\lambda = 3$, si ha $M_\lambda = [\emptyset]$, $\mathrm{Stab}_G(a) \cap 3Z = 6Z$ e $Z = 2Z + 3Z$.

Nell'articolo [13] sono stati costruiti degli M_λ ipergruppoidi considerando dei K-spazi vettoriali $V \neq \{0\}$ e l'azione del gruppo moltiplicativo K^* del campo K, determinata dalla restrizione a $K^* \times V^*$ dell'operazione esterna di V. Inoltre, nel Teorema 3.5 di [13] si è dimostrato che per ogni elemento $\lambda \in K^*$ il quasi-ipergruppoide V^*_λ è matroidale se e solo se λ è di periodo finito. Adesso, più in generale, si dimostra la seguente:

Proposizione 1.5. *Se esiste un elemento $a \in M$ tale che* $\mathrm{Stab}_G(a) \cap \langle\lambda\rangle = \{1_G\}$, *allora M_λ è matroidale se e solo se λ è di periodo finito.*

Dimostrazione. Per la Proposizione 3.1 di [13] basta provare l'implicazione $\Rightarrow$.

Si considerino i due sottoipergruppoidi ciclici $[a]$ e $[\lambda a]$. Per il Corollario 2.4 (1) di [13] si ha:

$$[a] = \{\lambda^k a\}_{k \geq 0} \text{ e } [\lambda a] = \{\lambda^k a\}_{k \geq 1}.$$

Per il Corollario 1.3, $a \in [\lambda a]$ e dunque esiste un intero $n \geq 1$ tale che $\lambda^n a = a$, da cui $\lambda^n = 1_G$ perchè $\mathrm{Stab}_G(a) \cap \langle\lambda\rangle = \{1_G\}$.

Immediata conseguenza della proposizione precedente è il seguente:

Corollario 1.6. *Se il gruppo G opera liberamente su M, per ogni elemento λ di G, M_λ è matroidale se e solo se λ è di periodo finito.*

L'azione considerata nella costruzione dei V_λ^*-ipergruppoidi è libera, quindi la Proposizione 1.5 fornisce un ulteriore dimostrazione del Teorema 3.5 di [13].

2. Dimensione di un M_λ-ipergruppoide matroidale.

Nella classe degli ipergruppoidi, la nozione di sotto-ipergruppoide generato da un sottoinsieme A si può riguardare come la chiusura di A e indicata con $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ la famiglia dei sotto-ipergruppoidi di un ipergruppoide $(H, \circ)$ si ha che $\mathcal{S}_{\mathcal{H}}$ oppure $\mathcal{S}_{\mathcal{H}} \cup \{\emptyset\}$ costituisce un sistema di chiusura a secondo che $[\emptyset] = \emptyset$ oppure $[\emptyset] \neq \emptyset$. Dunque si possono introdurre le nozioni di insieme *libero* : X è libero se è vuoto oppure $\forall x \in X$ si ha $x \notin [X - \{x\}]$; di insieme *dipendente*: X è dipendente se non è libero; di insieme di *generatori*: X genera H se $[X] = H$; di *base*: X è una base se $[X] = H$ e X è libero; ed analogamente a quanto è stato svolto per gli ipergruppi cambisti (vedi [8], [9], [23]) si può sviluppare una teoria della dimensione nella classe degli ipergruppoidi matroidali.

Si ha il seguente:

Teorema 2.1. *Si consideri un M_λ-ipergruppoide matroidale tale che $[\emptyset] = \emptyset$. Allora si ha:*

1) *Per ogni elemento $a \in M$, la famiglia $\mathcal{F}_a = \{[b]\}_{b \in Ga}$ è una partizione di Ga. Inoltre, se T è un trasversale delle classi di equivalenza R_a indotte da $\mathcal{F}_a$ su Ga, allora T è un insieme libero.*

2) *Se esiste un elemento $a \in M$ tale che $\mathcal{F}_a$ sia di cardinalità infinita, allora M_λ è di dimensione infinita.*

3) *Se $\{X_i\}_{i \in I}$ è una famiglia di sottoinsiemi liberi di M_λ tale che*

$$\left[\bigcup_{i \in I - \{j\}} X_i\right] \cap \left[X_j\right] = \emptyset,$$

per ogni $j \in I$, allora $\bigcup_{i \in I} X_i$ è un sottoinsieme libero di M_λ.

4) $\dim M_\lambda = |\mathcal{F}(M_\lambda)|$.

5) *Se G ed M hanno cardinalità finita e* $\mathrm{Stab}_G(a) \cap \langle\lambda\rangle = \{1_G\}$, *per ogni $a \in M$, allora*

$$\dim M_\lambda = \frac{1}{|\lambda|} \sum_{a \in J} [G : \mathrm{Stab}_G(a)].$$

Inoltre, se G opera liberamente su M, si ha $\dim M_\lambda = \dfrac{|M|}{|\lambda|}$.

Dimostrazione. 1) Per il Corollario 1.3, la famiglia $\mathcal{F}(M_\lambda) = \{[a]\}_{a\in M_\lambda}$ dei sottoipergruppoidi ciclici di M_λ è una partizione di M, ed ovviamente anche la famiglia $\mathcal{F}_a = \{[b]\}_{b\in Ga}$ è una partizione di Ga. Del resto, per ogni $b \in Ga$, si ha $R_a(b) = [b]$, e se T è un trasversale delle classi di equivalenza della relazione R_a, per ogni $b \in T$, si ha

$$[T - \{b\}] = \emptyset \Leftrightarrow T = \{b\}. \tag{2.7}$$

Inoltre, se $T - \{b\} \neq \emptyset$ e $b \in [T - \{b\}]$, esiste $c \in T - \{b\}$ tale che $b \in [c]$, dunque $[b] = [c]$, impossibile perchè T è un trasversale e $b \neq c$.

2) Subito da 1).

3) Se esistono $j \in I$ ed $a \in X_j$ tali che $a \in \big[(\bigcup_{i\in I} X_i) - \{a\}\big]$, per il Teorema 2.3 (5) di [13], si ha

$$a \in \Big[(\bigcup_{i\in I} X_i) - \{a\}\Big] = \Big[(\bigcup_{i\in I-\{j\}} X_i) \cup (X_j - \{a\})\Big] = \Big[\bigcup_{i\in I-\{j\}} X_i\Big] \cup \big[X_j - \{a\}\big],$$

quindi $a \in [\bigcup_{i\in I-\{j\}} X_i]$ oppure $a \in [X_j - \{a\}]$. In entrambi i casi il risultato è impossibile, perchè $[\bigcup_{i\in I-\{j\}} X_i] \cap [X_j] = \emptyset$ e X_j è libero. Dunque $\bigcup_{i\in I} X_i$ è libero.

4) Siano $J = \{a_i\}_{i\in I}$ un trasversale delle orbite dell'azione di G su M e T_{a_i} dei trasversali delle classi di equivalenza delle relazioni R_{a_i} indotte dalla partizione $\mathcal{F}_{a_i}$ di Ga_i. Se esistono $a \in M_\lambda$ e $j \in I$ tali che $a \in [\bigcup_{i\in I-\{j\}} T_{a_i}] \cap [T_{a_j}]$, per il Teorema 2.3 (4) di [13], esiste un intero $n \geq 0$ tale che $a \in \lambda^n(\bigcup_{i\in I-\{j\}} T_{a_i}) = \bigcup_{i\in I-\{j\}} \lambda^n T_{a_i}$. Dunque esiste $i \in I - \{j\}$ tale che $a \in [T_{a_i}]$, da cui $a \in [T_{a_i}] \cap [T_{a_j}] \subset Ga_i \cap Ga_j = \emptyset$, contraddizione. Pertanto $[\bigcup_{i\in I-\{j\}} T_{a_i}] \cap [T_{a_j}] = \emptyset$, per ogni $j \in I$.

Per 1) e 3), l'insieme $X = \bigcup_{i\in I} T_{a_i}$ è libero. Inoltre, X genera M_λ perchè

$$[X] = \Big[\bigcup_{i\in I} T_{a_i}\Big] = \bigcup_{i\in I} [T_{a_i}] = \bigcup_{i\in I} Ga_i = M, \tag{2.8}$$

dunque $\dim M_\lambda = |X| = |\mathcal{F}(M_\lambda)|$.

5) Se $J = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ è un trasversale delle orbite dell'azione φ di G su M, per il Corollario 4.4 di [13], si ha

$$|T_{a_i}| = \frac{[G : \mathrm{Stab}_G(a_i)]}{|\lambda|}, \tag{2.9}$$

e per 4)

$$\dim M_\lambda = |X| = \sum_{a_i \in J} |T_{a_i}| = \frac{1}{|\lambda|} \sum_{a_i \in J} [G : \mathrm{Stab}_G(a_i)].$$

Ovviamente, se G opera liberamente su M, si ha

$$\dim M_\lambda = \frac{1}{|\lambda|} |J||G| = \frac{|M|}{|\lambda|},$$

perchè $\mathrm{Stab}_G(a_i) = \{1_G\}$ e $|Ga_i| = |G|$, per ogni $a_i \in J$.

Immediata conseguenza del Teorema 1.1 è la seguente:

Proposizione 2.2. *Sia M_λ matroidale; sono equivalenti le seguenti condizioni:*

1) $[\emptyset] \neq \emptyset$;
2) $\dim M_\lambda = 0$;
3) $|\mathcal{F}(M_\lambda)| = 1$.

Osservazione. In ogni M_λ-ipergruppoide matroidale tale che la famiglia $\mathcal{F}(M_\lambda) = \{[a]\}_{a \in M_\lambda}$ dei sotto-ipergruppoidi ciclici di M_λ ha cardinalità maggiore di 1, si ha $[\emptyset] = \emptyset$ e $\dim[a] = 1$, per ogni $a \in M_\lambda$.

Osservazione. Se λ è un elemento di G di periodo finito, per la Proposizione 3.1 di [13], M_λ è matroidale e se $\langle\lambda\rangle$ è normale in G, per ogni coppia (a, b) di elementi di M e per ogni $x \in G$, si ha:

$$[a] = [b] \Leftrightarrow [xa] = [xb]. \tag{2.10}$$

Dunque, posto $x.[a] = [xa]$, risulta ben definita l'applicazione ψ : $(x, [a]) \mapsto x.[a] = [xa]$ da $G \times \mathcal{F}(M_\lambda)$ in $\mathcal{F}(M_\lambda)$. Del resto, per ogni $a \in M_\lambda$ e per ogni $(x, y) \in G^2$, si ha $1_G.[a] = [a]$ e $(xy).[a] = x.(y.[a])$, quindi ψ definisce un'azione del gruppo G sull'insieme $\mathcal{F}(M_\lambda)$ dei sottoipergruppoidi ciclici di M_λ. È facile verificare che l'orbita di $[a]$ è

$$G.[a] = \{[b]\}_{b \in Ga} \tag{2.11}$$

e se $\mathrm{Orb}(M_\lambda)$ e $\mathrm{Orb}(\mathcal{F}(M_\lambda))$ indicano, rispettivamente, l'insieme delle orbite dell'azione φ di G su M e dell'azione ψ di G su $\mathcal{F}(M_\lambda)$, l'applicazione $j : \mathrm{Orb}(\mathcal{F}(M_\lambda)) \to \mathrm{Orb}(M_\lambda)$ tale che $j(G.[a]) = Ga$ è ben definita e biunivoca.

Inoltre, se $\mathrm{Stab}_G([a])$ indica lo stabilizzatore del sottoipergruppide ciclico $[a]$ sotto l'azione ψ di G su $\mathcal{F}(M_\lambda)$, allora $x \in \mathrm{Stab}_G([a])$ se e solo se esiste un intero $n \geq 0$ tale che $x \in \lambda^n \operatorname{Stab}_G(a)$, dunque $\operatorname{Stab}_G([a]) = \langle\lambda\rangle \operatorname{Stab}_G(a) = \operatorname{Stab}_G(a)\langle\lambda\rangle$ e per conseguenza, se G è un gruppo finito, si ha:

$$|G.[a]| = [G : \langle\lambda\rangle \operatorname{Stab}_G(a)] = \frac{[G : \operatorname{Stab}_G(a)]}{|\lambda|} |\langle\lambda\rangle \cap \operatorname{Stab}_G(a)| \tag{2.12}$$

Infine, se M ha cardinalità finita e l'ipergruppoide M_λ è tale che $[\emptyset] = \emptyset$, per il Teorema 2.1 4), si ottiene:

$$\dim M_\lambda = \frac{1}{|\lambda|} \sum_{a \in J} [G : \operatorname{Stab}_G(a)] |\langle\lambda\rangle \cap \operatorname{Stab}_G(a)| \tag{2.13}$$

con J trasversale delle orbite dell'azione φ di G su M.

3. Omomorfismi di M_λ-ipergruppoidi.

In questo paragrafo verranno studiate le principali proprietà degli omomorfismi di M_λ-ipergruppoidi e successivamente se ne caratterizzeranno gli automorfismi, ma prima si osservi che un omomorfismo tra due ipergruppoidi $(H, \circ)$ e $(K, \diamond)$ è un'applicazione $f : H \to K$ tale che

$$f(a \circ b) \subseteq f(a) \diamond f(b), \forall (a, b) \in M^2, \tag{3.14}$$

e se in (3.14) vale l'uguaglianza l'omomorfismo f si dice buono.

Si considerino due gruppi G e G' operanti rispettivamente sugli insiemi M e M' e siano α, β due elementi appartenenti rispettivamente a G e G', inoltre, per semplicità di notazione, si indichino con lo stesso simbolo $\bullet$ le corrispondenti operazioni che definiscono i due M_λ-ipergruppoidi M_α e M'_β. Si dimostra la seguente:

Proposizione 3.1.

1) *Se f è un omomorfismo da M_α in M'_β, per ogni $a \in M_\alpha$ e per ogni $n \in N$, si ha $f(\alpha^n a) = \beta^n f(a)$;*

2) *Una applicazione $f : M_\alpha \to M'_\beta$ è un omomorfismo buono se e solo se $f(\alpha a) = \beta f(a)$, per ogni $a \in M$;*

3) *Ogni omomorfismo $f : M_\alpha \to M'_\beta$ è buono e per ogni coppia $(a, b) \in M_\alpha$ si ha:*

$$f^{-1}(f(a) \bullet f(b)) = [\alpha^{-2} f^{-1}(f(\alpha^2 a))] \bullet [\alpha^{-2} f^{-1}(f(\alpha^2 b))];$$

4) *Se g è un'applicazione biunivoca da M_α in M'_β, allora g è un omomorfismo da M_α in M'_β se e solo se g^{-1} è un omomorfismo da $M'_{\beta^{-1}}$ in $M_{\alpha^{-1}}$.*

Dimostrazione.

1) L'uguaglianza è ovvia se $n = 0$, inoltre si ha $\{f(\alpha a)\} = f(a \bullet a) \subset f(a) \bullet f(a) = \{\beta f(a)\}$, quindi $f(\alpha a) = \beta f(a)$, per ogni $a \in M_\alpha$. Infine, per induzione, si ottiene:

$$f(\alpha^{n+1}a) = f(\alpha(\alpha^n a)) = \beta f(\alpha^n a) = \beta[\beta^n f(a)] = \beta^{n+1} f(a).$$

2) l'implicazione $\Rightarrow$ segue subito da 1).

Viceversa, se per ogni $a \in M_\alpha$ si ha $f(\alpha a) = \beta f(a)$, allora

$$f(a) \bullet f(b) = \{\beta f(a), \beta f(b)\} = \{f(\alpha a), f(\alpha b)\} = f(\{\alpha a, \alpha b\}) = f(a \bullet b),$$

ed f è un omomorfismo buono.

3) Da 1) e 2) si ha che f è un omomorfismo buono. Inoltre, se $x \in [\alpha^{-2} f^{-1}(f(\alpha^2 a))] \bullet [\alpha^{-2} f^{-1}(f(\alpha^2 b))]$, allora $x = \alpha^{-1} f^{-1}(f(\alpha^2 a))$ oppure $x = \alpha^{-1} f^{-1}(f(\alpha^2 b))$.
Se $x = \alpha^{-1} f^{-1}(f(\alpha^2 a))$ (analogamente si tratta il caso $x = \alpha^{-1} f^{-1}(f(\alpha^2 b))$) si ha $\alpha x = f^{-1}(f(\alpha^2 a))$, quindi $\beta f(x) = f(\alpha x) = f(\alpha^2 a) = \beta^2 f(a)$.

Pertanto $f(x) = \beta f(a) \in f(a) \bullet f(b)$ e per conseguenza $x \in f^{-1}(f(a) \bullet f(b))$.

Viceversa, se $x \in f^{-1}(f(a) \bullet f(b))$, allora $f(x) \in f(a) \bullet f(b) = \{\beta f(a), \beta f(b)\}$, e se $f(x) = \beta f(a)$ si ha $f(\alpha x) = \beta f(x) = \beta^2 f(a) = f(\alpha^2 a)$. Dunque $\alpha x \in f^{-1}(f(\alpha^2 a))$, quindi

$$x \in \alpha^{-1} f^{-1}(f(\alpha^2 a)) = [\alpha^{-2} f^{-1}(f(\alpha^2 a))] \bullet [\alpha^{-2} f^{-1}(f(\alpha^2 a))].$$

Si perviene allo stesso risultato supponendo $f(x) = \beta f(b)$.

4) Se g è un omomorfismo si ha

$$g^{-1}(\beta^{-1}b) = a \Leftrightarrow \beta^{-1}b = g(a) \Leftrightarrow b = \beta g(a) =$$
$$= g(\alpha a) \Leftrightarrow \alpha a = g^{-1}(b) \Leftrightarrow a = \alpha^{-1} g^{-1}(b)$$

per cui

$$g^{-1}(\beta^{-1}b) = \alpha^{-1} g^{-1}(b), \text{ per ogni } b \in M'_{\beta^{-1}},$$

e per 2) l'applicazione g^{-1} è un omomorfismo da $M'_{\beta^{-1}}$ in $M'_{\alpha^{-1}}$.

Allo stesso modo si dimostra l'implicazione inversa.

Definizione. Un'applicazione f da M_α in M'_β si dice (α, β)-*lineare* se $f(\alpha a) = \beta f(a)$ e $f(\alpha^{-1} a) = \beta^{-1} f(a)$, per ogni $a \in M_\alpha$.

Dunque f è (α, β)-*lineare* se è contemporaneamente un omomorfismo da M_α in M'_β e da $M_{\alpha^{-1}}$ in $M'_{\beta^{-1}}$.

Se in particolare $G = G'$ e $\alpha = \beta$, le applicazioni (α, α)-lineari si chiameranno più semplicemente α-*lineari*.

Proposizione 3.2. *Se α e β hanno lo stesso periodo finito n, allora un'applicazione f da M_α in M'_β è (α, β)-lineare se e solo se $f(\alpha a) = \beta f(a)$, per ogni $a \in M$.*

Dimostrazione. L'implicazione $\Rightarrow$ è ovvia. Viceversa, la tesi è evidente se il periodo $n \in \{1, 2\}$, mentre se $n > 2$, per la Proposizione 3.1 - 1), si ha

$$f(\alpha^{-1}a) = f(\alpha^{n-1}a) = \beta^{n-1} f(a) = \beta^{-1} f(a).$$

Proposizione 3.3. *Sia f un'applicazione biunivoca da M_α in M'_β, allora sono equivalenti le seguenti condizioni:*

1) *f e f^{-1} sono omomorfismi, rispettivamente da M_α in M'_β e da M'_β in M_α;*
2) *f è (α, β)-lineare;*
3) *f è un omomorfismo regolare;*
4) *f e f^{-1} sono omomorfismi, rispettivamente da $M_{\alpha^{-1}}$ in $M'_{\beta^{-1}}$ e da $M'_{\beta^{-1}}$ in $M_{\alpha^{-1}}$.*

Dimostrazione. L'equivalenza tra 1) e 4) segue dalla Proposizione 3.1 - 4).

1) $\Rightarrow$ 2) Essendo f^{-1} un omomorfismo da M'_β in M_α, per la Proposizione 3.1 - 4), f è un omomorfismo da $M_{\alpha^{-1}}$ in $M'_{\beta^{-1}}$. Del resto, per ipotesi, f è anche un omomorfismo da M_α in M'_β, perciò f è (α, β)-lineare.

2) $\Rightarrow$ 3) essendo f un omomorfismo da $M_{\alpha^{-1}}$ in $M'_{\beta^{-1}}$, per la Proposizione 3.1 - 4), f^{-1} è un omomorfismo da M'_β in M_α e $f^{-1}(\beta b) = \alpha f^{-1}(b)$, per ogni $b \in M'_\beta$.

Dunque, per ogni coppia (x, y) di elementi di M_α, si ha:

$$\begin{aligned} f^{-1}(f(x) \bullet f(y)) = f^{-1}(\{\beta f(x), \beta f(y)\}) &= \{f^{-1}(\beta f(x)), f^{-1}(\beta f(y))\} \\ &= \{\alpha f^{-1}(f(x)), \alpha f^{-1}(f(y))\} \\ &= f^{-1}(f(x)) \bullet f^{-1}(f(y)). \end{aligned}$$

3) $\Rightarrow$ 1) Essendo f biunivoca, per ogni $b \in M'$, esiste $a \in M$ tale che $f(a) = b$, e per la regolarità di f si ha:

$$\begin{aligned} \{f^{-1}(\beta b)\} = f^{-1}(\{\beta f(a)\}) = f^{-1}(f(a) \bullet f(a)) = \\ = f^{-1}(f(a)) \bullet f^{-1}(f(a)) = a \bullet a \\ = \{\alpha a\} \\ = \{\alpha f^{-1}(b)\}. \end{aligned}$$

Dunque $f^{-1}(\beta b) = \alpha f^{-1}(b)$, per ogni $b \in M'_\beta$, e la Proposizione 2.1 - 2) completa la dimostrazione.

Immediata conseguenza della Proposizione 3.3 è il seguente corollario:

Corollario 3.4. *Se f è un'applicazione biunivoca da M in M, allora sono equivalenti le seguenti condizioni:*

1) *f e f^{-1} sono omomorfismi di M_α;*
2) *f è α-lineare.*

Definizione. Le applicazioni biunivoche $f : M_\alpha \to M'_\beta$ che sono (α, β)-lineari si dicono isomorfismi, e gli isomorfismi da M_α in sè si chiamano automorfismi di M_α.

L'insieme degli automorfismi di M_α si indicherà con $\Lambda(M_\alpha)$.

Ovviamente l'identità 1_M di M è un automorfismo di M_α, la composizione di due automorfismi di M_α è un automorfismo di M_α e per il Corollario 3.4, l'applicazione inversa di un automorfismo di M_α è ancora un automorfismo di M_α. Dunque l'insieme $\Lambda(M_\alpha)$ degli automorfismi di M_α è un sottogruppo del gruppo S_M delle permutazioni di M.

Proposizione 3.5.

1) *Se α appartiene al nucleo N_φ dell'azione φ di G su M, allora $\Lambda(M_\alpha) = S_M$.*
2) *Se $|M| \neq 2$, allora $\alpha \in N_\varphi \Longleftrightarrow \Lambda(M_\alpha) = S_M$.*

Dimostrazione.

1) Per ogni elemento b di M si ha $\alpha b = \alpha^{-1} b = b$, dunque $p(\alpha a) = p(a) = \alpha p(a)$ e $p(\alpha^{-1} a) = p(a) = \alpha^{-1} p(a)$, per ogni permutazione p di S_M e per ogni $a \in M$.

Perciò ogni permutazione di M è un automorfismo di M_α.

2) L'implicazione $\Rightarrow$ segue da 1).

Viceversa, la dimostrazione è immediata se $|M| = 1$, quindi sia $|M| > 2$.

Se esiste un elemento $a \in M$ tale che $\alpha a \neq a$, preso un elemento $b \in M - \{a, \alpha a\}$, la trasposizione $\tau = (a, b)$ è un applicazione α-lineare perchè $\Lambda(M_\alpha) = S_M$, quindi

$$\alpha a = \tau(\alpha a) = \alpha \tau(a) = \alpha b$$

e di conseguenza $a = b$, contraddizione.

Dunque, per ogni $a \in M$, si ha $\alpha a = a$ e quindi $\alpha \in N_\varphi$.

L'implicazione $\Leftarrow$ della Proposizione 3.5 - 2) non è in generale vera se la cardinalità di M è uguale a due. Infatti, facendo operare il gruppo ciclico

Z_2 su se stesso mediante l'azione determinata dall'operazione di Z_2, le due permutazioni di Z_2 sono entrambre $\overline{1}$-lineare, per cui si ha $\Lambda((Z_2)_{\overline{1}}) \cong S_2$, ma $\overline{1} \notin N_\varphi = \{\overline{0}\}$.

Ecco qualche esempio significativo di applicazioni α-lineari e di isomorfismi di M_α-ipergruppoidi:

Esempio 3. Se $V \neq \{0\}$ e $W \neq \{0\}$ sono due K spazi vettoriali, la restrizione a V^* di un applicazione lineare f da V in W è un'applicazione λ-lineare da V_λ^* in W_λ^*.

Esempio 4. Siano $V = K^n$, $W = K$ e $p(X) \in K[x_1, x_2, \ldots, x_n]$ un polinomio omogeneo di grado m. Per ogni $\lambda \in K$ e per ogni $X = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in V$, si ha $p(\lambda X) = \lambda^m p(X)$. Fissato $\lambda \in K^*$, l'applicazione $X \mapsto p(X)$, per ogni $X \in V^*$, è un' applicazione (λ, λ^m)-lineare da V_λ^* in $W_{\lambda^m}^*$.

Esempio 5. Sia $\boldsymbol{A}$ uno spazio affine sul K-spazio vettoriale V e Q un punto fissato in $\boldsymbol{A}$.

Per ogni $k \in K$ e per ogni $P \in \boldsymbol{A}$, sia kP il punto di $\boldsymbol{A}$ che soddisfa l'identità vettoriale:

$$\overrightarrow{Q(kP)} = k\,\overrightarrow{QP} \tag{3.15}$$

L'applicazione $(k, P) \mapsto kP$ determina un'azione del gruppo moltiplicativo K^* di K sull'insieme $\boldsymbol{A}^* = \boldsymbol{A} - \{\boldsymbol{0}\}$. Fissato un elemento $\lambda \in K^*$, l'iperprodotto (1.1) determina un $\boldsymbol{A}_\lambda^*$-ipergruppoide. Del resto, per ogni $v \in V^*$, esiste un solo punto P tale che $v = \overrightarrow{QP}$, sicchè l'applicazione $f : V_\lambda^* \to \boldsymbol{A}_\lambda^*$ tale che $f(v) = P$ è un isomorfismo di M_λ-ipergruppoidi, perchè è biunivoca e λ-lineare.

Adesso verranno dimostrati alcuni teoremi su gli automorfismi di G_λ ipergruppoidi, dove G è un gruppo operante su se stesso mediante l'operazione di G e λ è un prefissato elemento di G. Si osservi che un automorfismo di G_λ è per definizione una permutazione p di G tale che $p(\lambda g) = \lambda p(g)$ e $p(\lambda^{-1} g) = \lambda^{-1} p(g)$, per ogni $g \in G$.

Del resto, per la Proposizione 3.1 - 1), per ogni $n \in Z$ e per ogni $g \in G$, si ha

$$p(\lambda^n g) = \lambda^n p(g) \tag{3.16}$$

e per ogni $k \in Z$

$$p(\lambda^n p^k(g)) = \lambda^n p^{k+1}(g). \tag{3.17}$$

Pertanto la restrizione di p al laterale $\langle\lambda\rangle p^k(g)$ è un'applicazione biunivoca dal laterale $\langle\lambda\rangle p^k(g)$ in $\langle\lambda\rangle p^{k+1}(g)$.

Inoltre, se esiste $x = \lambda^n g \in \langle\lambda\rangle g$ tale che $p(x) = x$, per ogni $y \in \lambda^m g \in \langle\lambda\rangle g$, si ha

$$p(y) = p(\lambda^m g) = p(\lambda^{m-n}(\lambda^n g)) = \lambda^{m-n} p(\lambda^n g) = \lambda^{m-n}(\lambda^n g) = \lambda^m g = y$$

e si ricava la proprietà:

(3.18) *Un automorfismo p di G_λ fissa ogni elemento di $\langle\lambda\rangle g$ se e solo se fissa almeno un elemento di $\langle\lambda\rangle g$.*

Teorema 3.6. *Se G è un gruppo ciclico finito di ordine n, generato da λ, allora il gruppo $\Lambda(G_\lambda)$ degli automorfismi di G_λ è isomorfo a G.*

Dimostrazione. Sia p il ciclo di S_G così definito:

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 & \dots & \lambda^{n-2} & \lambda^{n-1} \\ \lambda & \lambda^2 & \lambda^3 & \dots & \lambda^{n-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

La permutazione p è un'applicazione λ-lineare di G_λ, infatti, per ogni $g = \lambda^k \in G$, si ha:

$$p(\lambda g) = p(\lambda\lambda^k) = p(\lambda^{k+1}) = \lambda^{k+2} = \lambda p(\lambda^k) = \lambda p(g).$$

Dunque p è un automorfismo di G_λ e il sottogruppo ciclico $\langle p\rangle$ di S_G, generato da p, è contenuto in $\Lambda(G_\lambda)$.

Del resto $\langle p\rangle$ è ciclico di ordine n, quindi è isomorfo a G, e per ogni intero k tale che $0 \le k < n-1$ si ha:

$$p^k = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 & \dots & \lambda^{n-k-1} & \lambda^{n-k} & \lambda^{n-k+1} & \dots & \lambda^{n-1} \\ \lambda^k & \lambda^{k+1} & \lambda^{k+2} & \dots & \lambda^{n-1} & 1 & \lambda & \dots & \lambda^{k-1} \end{pmatrix}.$$

Adesso, se $q \in \Lambda(G_\lambda)$ e $q(1) = \lambda^k$, si ha

$$q(\lambda) = q(\lambda 1) = \lambda q(1) = \lambda\lambda^k = \lambda^{k+1}$$

e ricorsivamente si prova che $q = p^k$.

Dunque $q \in \langle p\rangle$ e $\langle p\rangle = \Lambda(G_\lambda)$.

Teorema 3.7. *Siano λ e μ elementi appartenenti, rispettivamente, ai due gruppi G e G' tali che $|\lambda| = |\mu|$, e siano $H = \{g_i\}_{i\in I}$ e H' due trasversali, rispettivamente, dei laterali sinistri di $\langle\lambda\rangle$ in G e di $\langle\mu\rangle$ in G'. Se $\overline{p}$ è un'applicazione biunivoca da H in H', allora esiste un solo isomorfismo p da G_λ in G'_μ tale che $p(g_i) = \overline{p}(g_i)$, per ogni $i \in I$.*

Dimostrazione. Sia $p(g) = \mu^k \overline{p}(g_i)$, per ogni $g = \lambda^k g_i \in G$.

Se $\lambda^n g_i = \lambda^m g_i$, si ha $\lambda^n = \lambda^m$, per cui $\lambda^{n-m} = 1_G$ e l'ordine di λ è finito e divide $n - m$. Del resto, per ipotesi, si ha $|\mu| = |\lambda|$, quindi $\mu^n = \mu^m$ e

$$p(\lambda^n g_i) = \mu^n \overline{p}(g_i) = \mu^m \overline{p}(g_i) = p(\lambda^m g_i).$$

Sicchè p è un'applicazione ben definita da G in G'.

p è (λ, μ)-lineare, perchè

$$p(\lambda g) = p(\lambda^{k+1} g_i) = \mu^{k+1} \overline{p}(g_i) = \mu(\mu^k \overline{p}(g_i)) = \mu p(g)$$

ed analogamente $p(\lambda^{-1} g) = \lambda^{-1} p(g)$, per ogni $g = \lambda^k g_i \in G$.

Inoltre, se $x = \lambda^n g_i$ e $y = \lambda^m g_j$ sono due elementi di G tali che $p(x) = p(y)$, allora $\mu^n \overline{p}(g_i) = \mu^m \overline{p}(g_j)$, ed essendo $\{\overline{p}(g_i), \overline{p}(g_j)\} \subset H'$, si ha $\overline{p}(g_i) = \overline{p}(g_j)$ e per conseguenza $g_i = g_j$ e $\mu^n = \mu^m$. Pertanto, l'ordine di μ è finito e divide $n - m$. Del resto, per ipotesi, $|\lambda| = |\mu|$, dunque si ha $\lambda^n = \lambda^m$ e $x = y$, perchè $g_i = g_j$.

Ovviamente p è anche suriettiva in quanto H' è un trasversale dei laterali sinistri di $\langle\lambda\rangle$ in G; dunque p è un isomorfismo da G_λ in G'_μ.

Infine, se q è un altro isomorfismo da G_λ in G'_μ tale che $q(g_i) = \overline{p}(g_i)$, per la Proposizione 3.1 - 1), si ha $q(g) = q(\lambda^n g_i) = \mu^n q(g_i) = \mu^n \overline{p}(g_i) = p(g)$, per ogni $g = \lambda^n g_i \in G$. Pertanto $p = q$ e anche l'unicità è dimostrata.

Corollario 3.8. *Se $H = \{g_i\}_{i \in I}$ e H' sono due trasversali dei laterali sinistri di $\langle\lambda\rangle$ in G e $\overline{p}$ è un'applicazione biunivoca da H in H', allora esiste un solo automorfismo p di G_λ tale che $p(g_i) = \overline{p}(g_i)$, per ogni $i \in I$.*

Dimostrazione. Segue subito dal Teorema 3.7 considerando $G = G'$ e $\lambda = \mu$.

Corollario 3.9. *Se G è un gruppo finito di ordine n, per ogni elemento λ di G tale che $[G : \langle\lambda\rangle] = m$, si ha:*

$$G_\lambda \cong (Z_n)_{\overline{m}}.$$

Dimostrazione. Se $[G : \langle\lambda\rangle] = m$, i due elementi $\lambda \in G$ e $\overline{m} \in Z_n$ hanno lo stesso ordine e generano, nei rispettivi gruppi, sottogruppi dello stesso indice m. Per il Teorema 3.7 si ha che $G_\lambda \cong (Z_n)_{\overline{m}}$.

Teorema 3.10. *Se G è un gruppo finito, per ogni elemento λ di G, si ha:*

$$|\Lambda(G_\lambda)| = [G : \langle\lambda\rangle]!|\lambda|^{[G:\langle\lambda\rangle]}.$$

Dimostrazione. Nel corso della dimostrazione gli automorfismi di G_λ, costruiti come nel Teorema 3.7 e corrispondenti ad applicazioni biunivoche $\overline{p}$ da un trasversale H in un trasversale H' di laterali sinistri di $\langle\lambda\rangle$ in G, verranno chiamati (λ, H, H')-automorfismi di G_λ.

Se $\mathcal{T}$ è l'insieme dei trasversali dei laterali sinistri di $\langle\lambda\rangle$ in G e $[G : \langle\lambda\rangle] = m$, allora la cardinalità di $\mathcal{T}$ è $|\lambda|^m$, e fissato un trasversale $H \in \mathcal{T}$, per ogni altro trasversale H' di $\mathcal{T}$, esistono $m!$ applicazioni biunivoche da H in H' a cui corrispondono altrettanti (λ, H, H')-automorfismi distinti di G_λ. Inoltre, se H' e H'' sono due trasversali distinti di $\mathcal{T}$, le applicazioni biunivoche da H in H' sono distinte dalle applicazioni biunivoche da H in H'', ed anche i corrispondenti (λ, H, H')-automorfismi di G_λ sono distinti dai corrispondenti (λ, H, H'')-automorfismi di G_λ. Pertanto, fissato il trasversale H, al variare di H' in $\mathcal{T}$, l'insieme $Aut_H(G_\lambda)$ dei (λ, H, H')-automorfismi di G_λ ha cardinalità:

$$|Aut_H(G_\lambda)| = m!|\lambda|^m.$$

Adesso, supposto $H = \{g_1, g_2, \ldots, g_m\}$, se q è un automorfismo di G_λ, la restrizione di q al laterale $\langle\lambda\rangle g_i$ è un applicazione biunivoca da $\langle\lambda\rangle g_i$ in $\langle\lambda\rangle q(g_i)$, dunque gli m elementi $q(g_1), q(g_2), \ldots, q(g_m)$, oltre ad essere distinti, determinano un trasversale di $\langle\lambda\rangle$ in G. Infatti, se $g_i \neq g_j$ e $\langle\lambda\rangle q(g_i) = \langle\lambda\rangle q(g_j)$, allora esistono due interi m ed n tali che $\lambda^m q(g_i) = \lambda^n q(g_j)$ e la λ-linearità di q implica $q(\lambda^m g_i) = q(\lambda^n g_j)$, da cui si ha $\lambda^m g_i = \lambda^n g_j$ e $\langle\lambda\rangle g_i = \langle\lambda\rangle g_j$, contraddizione.

Infine, posto $H' = \{q(g_1), q(g_2), \ldots, q(g_m)\}$ e detta $\overline{p}$ l'applicazione da H in H' tale che $\overline{p}(g_i) = q(g_i)$, per ogni $g_i \in H$, il (λ, H, H')-automorfismo di G_λ corrispondente a $\overline{p}$ coincide con q, sicchè $q \in Aut_H(G)$, $\Lambda(G_\lambda) = Aut_H(G_\lambda)$ e la dimostrazione è conclusa.

Esempio 6. Se K è un campo finito di caratteristica $\neq 2$ e cardinalità p^α, il gruppo moltiplicativo K^* di K è ciclico ed il gruppo $\Lambda((K^*)_{-1_K})$ degli automorfismi di $(K^*)_{-1_K}$ ha cardinalità:

$$|\Lambda((K^*)_{-1_K})| = \left(\frac{p^\alpha - 1}{2}\right)!2^{\frac{p^\alpha-1}{2}}.$$

Osservazione. Le applicazioni $f : R \to R$ (reali di variabile reale) dispari soddisfano l'identità $f(-x) = -f(x)$, per ogni $x \in R$, per cui la restrizione $\overline{f}$ di f a R^* è un'applicazione (-1)-lineare di $(R^*)_{-1}$. Ovviamente si ha:

$$\Lambda((R^*)_{-1}) = \{\overline{f} : (R^*)_{-1} \to (R^*)_{-1} | f \text{ sia dispari e biunivoca}\}.$$

Esempio 7. Considerato il gruppo ciclico Z_4, per la Proposizione 3.5 e il Teorema 3.6, si ha $\Lambda((Z_4)_{\overline{0}}) \cong S_4$ e $\Lambda((Z_4)_{\overline{1}}) \cong Z_4 \cong \Lambda((Z_4)_{\overline{3}})$.

L'elemento $\overline{2}$, ovviamente, ha periodo due e genera un sottogruppo di indice 2. Per il Teorema 3.10, la cardinalità del gruppo $\Lambda((Z_4)_{\overline{2}})$ degli automorfismi di $(Z_4)_{\overline{2}}$ è otto.

Gli elementi di $\Lambda((Z_4)_{\overline{2}})$ si ottengono come $(\overline{2}, H_1, H_i)$-automorfismi dei trasversali

$$H_1 = \{\overline{0}, \overline{1}\},\ H_2 = \{\overline{0}, \overline{3}\},\ H_3 = \{\overline{1}, \overline{2}\},\ H_4 = \{\overline{2}, \overline{3}\}$$

per $i = 1, 2, 3, 4$.

Da una facile verifica si ricava che gli automorfismi di $(Z_4)_{\overline{2}}$ sono le seguenti otto permutazioni di Z_4:

$$\mathbf{1}, p, p^2, p^3, q, q \circ p, q \circ p^2, q \circ p^3$$

dove p è un ciclo di lunghezza quattro sull'insieme degli elementi di Z_4 e q è la permutazione: $q = (\overline{0}, \overline{2})(\overline{1})(\overline{3})$.

Dunque $\Lambda((Z_4)_{\overline{2}})$ è isomorfo al gruppo dietrale D_4.

Esempio 8. Rispetto al gruppo Z_6 si ottiene $\Lambda((Z_6)_{\overline{0}}) \cong S_6$ e $\Lambda((Z_6)_{\overline{1}}) \cong Z_6 \cong \Lambda((Z_6)_{\overline{5}})$. Inoltre, per il Corollario 3.9, $(Z_6)_{\overline{4}}) \cong (Z_6)_{\overline{2}}$ perchè $[Z_6 : \langle\overline{4}\rangle] = [Z_6 : \langle\overline{2}\rangle] = 2$, quindi $\Lambda((Z_6)_{\overline{4}}) \cong \Lambda((Z_6)_{\overline{2}})$. Costruendo le 18 permutazioni che descrivono $\Lambda((Z_6)_{\overline{2}})$, si verifica che $\Lambda((Z_6)_{\overline{2}})$ è prodotto semidiretto dei due sottogruppi $\langle t\rangle$ e $\langle p, q\rangle$, dove t, p e q sono le tre permutazioni:

$$t = (\overline{0}, \overline{1})(\overline{2}, \overline{3})(\overline{4}, \overline{5}),\ p = (\overline{0})(\overline{2})(\overline{4})(\overline{1}, \overline{3}, \overline{5}),\ q = (\overline{0}, \overline{2}, \overline{4})(\overline{1})(\overline{3})(\overline{5}).$$

Si osservi che $tp = qt$, $tq = pt$ e $pq = qp$, inoltre $|p| = |q| = 3$ e $|t| = 2$, quindi $\langle p, q\rangle \cong Z_3 \times Z_3$ e $\langle t\rangle \cong Z_2$.

Infine, il gruppo $\Lambda((Z_6)_{\overline{3}})$ ha 32^4 elementi e il sottogruppo H generato dalle tre permutazioni

$$a = (\overline{0})(\overline{1})(\overline{3})(\overline{4})(\overline{2}, \overline{5}),\ b = (\overline{0})(\overline{3})(\overline{1}, \overline{2}, \overline{4}, \overline{5}),\ c = (\overline{0}, \overline{3})(\overline{1}, \overline{2})(\overline{4}, \overline{5})$$

è un suo 2-sottogruppo di Sylow. Ovviamente i 2-sottogruppi di Sylow di $\Lambda((Z_6)_{\overline{3}})$ non contengono sottogruppi di ordine maggiore di 8, e siccome la permutazione $\beta = (\overline{0}, \overline{1})(\overline{3}, \overline{4})(\overline{2})(\overline{5})$ di $\Lambda((Z_6)_{\overline{3}})$ è tale che

$$\beta H \beta^{-1} = \{1, a, b^2, b^2a, cb, cba, cb^3, cb^3a\},$$

l'ordine massimo delle intersezioni tra due 2-sottogruppi di Sylow di $\Lambda((Z_6)_{\overline{3}})$ è 8. Per il Teorema 3.60 (ii) (b) di [15], il sottogruppo $N = \beta H \beta^{-1} \cap H$ è normale in $\Lambda((Z_6)_{\overline{3}})$, inoltre il ciclo $\alpha = (\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5})$ appartiene a $\Lambda((Z_6)_{\overline{3}})$ e genera un sottogruppo $\langle\alpha\rangle$ di ordine 6 tale che $\langle\alpha\rangle \cap N = \{1\}$, dunque $\Lambda((Z_6)_{\overline{3}}) = \langle\alpha\rangle N$.

È facile verificare che $N \cong Z_2 \times Z_2 \times Z_2$ ed ovviamente $\langle\alpha\rangle$ è isomorfo a Z_6.

Se G è un gruppo che opera liberamente su un insieme M e T, T' sono due trasversali delle orbite determinate dall'azione di G su M, per ogni elemento $b \in M$, esiste un unica coppia $(x, a) \in G \times T$ tale che $b = xa$, ed alla scelta di un automorfismo p di G_λ e di una applicazione biunivoca σ da T in T' resta definita un'applicazione f da M in M tale che

$$f(b) = p(x)\sigma(a), \ \forall b = xa \in M. \tag{3.19}$$

Proposizione 3.11. *L'applicazione f definita in* (3.19) *è un automorfismo di M_λ.*

Dimostrazione. Per ogni $b = xa \in M$, si ha $\lambda b = (\lambda x)a$, per cui

$$f(\lambda b) = p(\lambda x)\sigma(a) = \lambda p(x)\sigma(a) = \lambda f(b)$$

ed analogamente

$$f(\lambda^{-1} b) = \lambda^{-1} f(b).$$

Dunque f è λ-lineare.

Inoltre, se $b_1 = x_1 a_1$, $b_2 = x_2 a_2$ e $f(b_1) = f(b_2)$, allora $p(x_1)\sigma(a_1) = p(x_2)\sigma(a_2)$, dunque $\sigma(a_1) \in G\sigma(a_2)$ con $\{\sigma(a_1), \sigma(a_2)\} \subset T$, e siccome T è un trasversale delle orbite dell'azione di G su M e σ è una permutazione di T, si ha $\sigma(a_1) = \sigma(a_2)$ e $a_1 = a_2$. Pertanto f è iniettiva.

È anche facile provare che f è suriettiva perchè lo sono l'automorfismo p di G_λ e l'applicazione σ da T in T'.

Definizione. Gli automorfismi f di M_λ della Proposizione 3.11 si diranno (λ, T, T')-automorfismi di M_λ. In particolare, se $T = T'$, si chiameranno (λ, T)-automorfismi di M_λ.

Teorema 3.12. *Se G opera liberamente su M, l'insieme $\Lambda_T(M_\lambda)$ dei (λ, T)-automorfismi di M_λ è un sottogruppo del gruppo $\Lambda(M_\lambda)$ degli automorfismi di M_λ isomorfo al prodotto diretto $\Lambda(G_\lambda) \times S_T$ del gruppo degli automorfismi di G_λ e del gruppo delle permutazioni di T.*

Dimostrazione. Si utilizzerà la notazione $f_{p,\sigma}$ per indicare il (λ, T)-automorfismo f definito in (3.19), avendo fissato l'automorfismo p di G_λ e la permutazione σ di T.

Se 1_G, 1_T e 1_M sono rispettivamente le identità di $\Lambda(G_\lambda)$, di S_T e del gruppo S_M delle permutazioni di M, per ogni $b = xa \in M$, si ha:

$$f_{1_G,1_T}(b) = f_{1_G,1_T}(xa) = 1_G(x)1_T(a) = xa = b = 1_M(b)$$

perciò

$$1_M = f_{1_G,1_T} \in \Lambda_T(M_\lambda).$$

Del resto, per ogni $(p, q) \in (\Lambda(G_\lambda))^2$ e per ogni $(\sigma, \tau) \in (S_T)^2$, si ha:

$$\begin{aligned} f_{q,\tau} \circ f_{p,\sigma}(b) = f_{q,\tau}(p(x)\sigma(a)) = q(p(x))\tau(\sigma(a)) &= [q \circ p(x)][\tau \circ \sigma(a)] \\ &= f_{q\circ p,\tau\circ\sigma}(xa) \\ &= f_{q\circ p,\tau\circ\sigma}(b), \end{aligned}$$

dunque $f_{q,\tau} \circ f_{p,\sigma} = f_{q\circ p,\tau\circ\sigma}$ e $f_{q,\tau} \circ f_{p,\sigma} \in \Lambda_T(M_\lambda)$.

Inoltre

$$f_{p^{-1},\sigma^{-1}} \circ f_{p,\sigma} = f_{p^{-1}\circ p,\sigma^{-1}\circ\sigma} = f_{1_G,1_T} = f_{p\circ p^{-1},\sigma\circ\sigma^{-1}} = f_{p,\sigma} \circ f_{p^{-1},\sigma^{-1}}$$

quindi

$$(f_{p,\sigma})^{-1} = f_{p^{-1},\sigma^{-1}} \in \Lambda_T(M_\lambda).$$

Dunque $\Lambda_T(M_\lambda)$ è un sottogruppo del gruppo degli automorfismi di M_λ.

Adesso, siano $A = \{f_{1_G,\sigma} \in \Lambda_T(M_\lambda) | \sigma \in S_T\}$ e $B = \{f_{p,1_T} \in \Lambda_T(M_\lambda) | p \in \Lambda(G_\lambda)\}$.

È immediato provare che A e B sono sottogruppi di $\Lambda_T(M_\lambda)$, normali in $\Lambda_T(M_\lambda)$ perchè

$$\begin{aligned} f_{q,1_T} \circ f_{p,\tau} &= f_{q\circ p,\tau} = f_{p,\tau} \circ f_{p^{-1}\circ q\circ p,1_T} \\ f_{p,\tau} \circ f_{q,1_T} &= f_{p\circ q,\tau} = f_{p\circ q\circ p^{-1},1_T} \circ f_{p,\tau} \end{aligned}$$

ed inoltre

$$\begin{aligned} f_{1_G,\sigma} \circ f_{p,\tau} &= f_{p,\sigma\circ\tau} = f_{p,\tau} \circ f_{1_G,\tau^{-1}\circ\sigma\circ\tau} \\ f_{p,\tau} \circ f_{1_G,\sigma} &= f_{p,\tau\circ\sigma} = f_{1_G,\tau\circ\sigma\circ\tau^{-1}} \circ f_{p,\tau} \end{aligned}$$

per cui $A \circ f_{p,\tau} = f_{p,\tau} \circ A$ e $B \circ f_{p,\tau} = f_{p,\tau} \circ B$, per ogni $f_{p,\tau} \in \Lambda_T(M_\lambda)$.

Del resto le due applicazioni $\varphi : f_{p,1_T} \mapsto p$ e $\varphi : f_{1_G,\sigma} \mapsto \sigma$ sono degli isomorfismi di gruppi, rispettivamente da A in $\Lambda(G_\lambda)$ e da B in S_T, ed inoltre

$A \cap B = \{f_{1_G,1_T}\}$ e $f_{p,\sigma} = f_{p,1_T} \circ f_{1_G,\sigma}$, per ogni coppia $(p,\sigma) \in \Lambda(G_\lambda) \times S_T$. Dunque

$$\Lambda_T(M_\lambda) \cong A \times B \cong \Lambda(G_\lambda) \times S_T.$$

Esempio 9. Nella costruzione della classe dei V_λ^*-ipergruppoidi, l'azione considerata è libera e le orbite sono gli insiemi $\langle v\rangle^* = \langle v\rangle - \{\overline{0}\}$, cioè i sottospazi generati da vettori non nulli privati del vettore nullo.

Se V è un K-spazio di dimensione n, le orbite si possono riguardare come i punti dello spazio proiettivo $P^{n-1}(V)$ su V, e se K è un campo finito di cardinalità p^α, allora ogni trasversale T ha cardinalità

$$|P^{n-1}(V)| = \frac{p^{n\alpha} - 1}{p^\alpha - 1}.$$

Applicando i Teoremi 3.10 e 3.12, per ogni elemento λ di K^*, si ottiene:

$$|\Lambda_T(V_\lambda^*)| = [K^* : \langle\lambda\rangle]!|P^{n-1}(V)|!|\lambda|^{[K^*:\langle\lambda\rangle]}$$

Del resto, il gruppo moltiplicativo K^* di un campo finito è ciclico e se in particolare λ è un generatore di K^*, allora

$$|\Lambda_T(V_\lambda^*)| = |P^{n-1}(V)|!(p^\alpha - 1).$$

BIBLIOGRAFIA

[1] M. Ascbacher, *Finite group theory,* Cambridge University Press, 1988.

[2] P. Corsini, *Prolegomena of hypergroup theory,* 2nd ed., Aviani Editore, 1992.

[3] P. Corsini, *Hypergraphs and hypergroups,* Algebra Universalis, 35 (1996), pp. 548–555.

[4] P. Corsini - Y. Sureau, *Sur les sous-hypergroupes d'un hypergroupe,* Riv. Mat. Pura e Appl. Univ. Udine, 1 (1987), pp. 7–21.

[5] M. De Salvo - D. Freni - G. Lo Faro, *On the hypergroups with four proper pairs and two or three non scalar elements,* Rend. Circolo Matematico Palermo, (2) 46 (1997), pp. 29–51.

[6] M. De Salvo - D. Freni - G. Lo Faro, *On the hypergroups with four proper pairs and three or four non scalar elements,* Accettato per la pubblicazione su gli Analele Stiintifice Ale Universitatii Al. I Cuza Iasi (Romania), 1995-96.

[7] D. Freni, *Structure des hypergroupes quotients et des hypergroupes de type U, application à la théorie de la dimension et à l'Homologie non abelienne,* These de Doctorat, Univ. de Clermont Ferrand II, 1985.

[8] D. Freni, *Sur les hypergroupes cambistes,* Rend. Istituto Lombardo, 119 (1985) pp. 175–186.

[9] D. Freni, *Sur les théorie de la dimension dans les hypergroupes,* Acta Univ. Carolinae Math. Phys., 27-2 (1986).

[10] D. Freni, *Une note sur le coeur d'un hypergroupe et sur la clôture transitive β^* de β,* Riv. Mat. Pura e Appl. Univ. Udine, 8 (1991), pp. 153–156.

[11] D. Freni, *On a strongly regular relation in hypergroupoids,* P.U.M.A. Budapest, Ser. A, 3 (1992), pp. 191–198.

[12] D. Freni, *Una nota sugli ipergruppoidi ciclici,* Ratio Mathematica Univ. Pescara, 9 (1995), pp. 101–111.

[13] D. Freni, *Contributo alle iperstrutture matroidali,* Le Matematiche, 52 (1997), pp. 271–295.

[14] M. Gutan - D. Freni - Y. Sureau, *Sur le groupe des scalires d'un hypergroupe,* Atti del convegno "New frontiers in hyperstructures and related algebras" di Monteroduni, Hadronic Press, U.S.A. (1996), pp. 103–124.

[15] A. Machì , *Introduzione alla teoria dei gruppi,* Feltrinelli, 1974.

[16] W. Prenowitz - J. Jantosciak, *Geometries and Join Spaces,* Journal fur die reine und angewandte Mathematik, 257 (1972).

[17] M. Scafati Tallini, *Hypervector spaces,* Proc. fourt int. Congress on AHA (1990), pp. 167–174.

[18] M. Scafati Tallini, *Matroidal hypervector spaces,* Jour. of Geometry, 42 (1991), pp. 132–140.

[19] M. Scafati Tallini, *La categoria degli spazi ipervettoriali,* Riv. Mat. Pura e Appl. Univ. Udine, 15 (1994), pp. 97–109.

[20] S. Spartalis - T. Vougiouklis, *The fundamental relations on H_V-rings,* Riv. Mat. Pura e Appl. Univ. Udine, 14 (1994), pp. 7–20.

[21] G. Tallini, *Geometric hyperquasigroups and line spaces,* Acta Univ. Carolinae Math. Phys., 25 (1984), pp. 69–73.

[22] G. Tallini, *On Steiner hypergroups and linear codes,* Atti Convegno su Ipergruppi e altre strutture multivoche e loro applicazioni, Univ. Udine (1985), pp. 87–91.

[23] G. Tallini, *Dimensione negli ipergruppi,* Atti Univ. Cattolica di Milano, Sci. Mat., 11 (1994), pp. 367–390.

[24] T. Vougiouklis, *The fundamental relations on H_V-rings. The general hyperfield,* Proc. Fourth Int. Cong. on Algebraic Hyperstr. and Appl., World Scientific (1991), pp. 203–211.

Dipartimento di Matematica e Informatica,
Università di Udine,
Via delle Scienze, 206
33100 Udine (ITALY),
e-mail: freni@dimi.uniud.it